

ФУНКЦИОНАЛЬНОСТЬ И ЭСТЕТИЧНОСТЬ КРИВЫХ ЛИНИЙ В ПРОМЫШЛЕННОМ ДИЗАЙНЕ: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА ФОРМ В САД-СИСТЕМАХ БУДУЩЕГО

Валериян Муфтеев

к.тех.н.

Кафедра механики и инженерной графики, Башкирский государственный аграрный университет, г.

Уфа, Российская Федерация

E-mail: muftejev@mail.ru

Рушан Зиятдинов

к.физ.-мат.н. (PhD)

Кафедра промышленной инженерии и инженерного менеджмента, Университет Кемён, г. Тэгу,

Республика Корея

E-mail: ziatdinov@kmu.ac.kr, ruzhanziatdinov@gmail.com

URL: <http://www.ziatdinov-lab.com/>

Аннотация. Предлагается многокритериальный подход к оценке качества геометрических форм функциональных кривых, являющихся составляющими поверхностей, используемых для компьютерного моделирования форм объектов в различных видах дизайна. На основе анализа движения материальной точки по криволинейной траектории предлагаются требования к качеству функциональных кривых, включающие в себя **высокий порядок гладкости, минимальное число экстремумов кривизны, минимизацию максимального значения кривизны и скорости ее изменения, минимизацию функционала потенциальной энергии кривой, эстетический анализ с позиций законов технической эстетики.** Авторы надеются, что предложенные требования станут толчком к развитию нового поколения систем автоматического проектирования, в которых важнейшую роль будет играть интегративный подход, учитывающий современные достижения теоретической и вычислительной математики, законы красоты и природы, слияние которых в единую систему даст неоценимый синергетический эффект.

Введение

Плоские и пространственные кривые в технических проектах, обеспечивающие некоторую функциональную характеристику объекта, целесообразно называть *функциональными кривыми* [Муфтеев и др., 2013]. Среди функциональных кривых можно выделить подкласс *инженерных кривых*, которые лишь единственным оптимальным образом обеспечивают некоторую проектную характеристику объекта. К таким кривым, например, можно отнести спираль Архимеда, используемую для дизайна профиля зубьев шестерни, а также *брахистохрону* – кривую наискорейшего спуска для транспортировки предметов [Павлов, 1969]. Цепная линия, используемая

для моделирования поверхности купола или висячей конструкции, а также клотоида, используемая для конструирования участков виража с линейным изменением центробежной силы, начиная с нуля [Arslan et al., 2014] – всё это тоже примеры инженерных кривых.

Инженерные кривые широко используются для решения различного рода проблем и задач, возникающих в разных отраслях техники и технологий. Приведем несколько простых примеров:

- Профиль крыла самолета создает подъемную силу, поэтому при моделировании кривой профиля необходимо максимизировать подъемную силу при минимизации лобового сопротивления.
- Трасса дороги обеспечивает комфортную безопасную езду на транспортном средстве с определенной скоростью, поэтому необходимо добиваться максимальной плавности трассы при заданных ограничениях.
- Профиль кулачка определяет перемещение толкателя с клапаном для обеспечения необходимого закона газораспределения, поэтому при его конструировании рекомендуется добиваться безударного плавного движения клапана.
- Внешнюю кузовную поверхность автомобиля, архитектурные криволинейные формы здания можно отнести к функциональным поверхностям, если эстетичность и красоту рассматривать как проектную характеристику изделия, которая определяет его потребительские свойства.

Во всех остальных случаях функциональные кривые имеют так называемую *свободную форму*. Плоские функциональные кривые свободной формы могут быть локально-выпуклыми (с постоянным знаком функции кривизны) и могут иметь точки перегиба (участки с разным знаком функции кривизны). Кроме того, функциональные кривые могут быть пространственными и, соответственно, иметь кручение. Заинтересованному в плоских кривых читателю рекомендуется к прочтению известная книга-справочник [Савелов, 1960].

В предыдущих работах авторов применительно к техническим объектам были определены базовые и дополнительные требования к качеству функциональной кривой по критериям плавности [Муфтеев и др. 1986, Ossipov et al. 1989, Мударисов и др. 2009, Муфтеев 2013]. Ряд исследований был посвящен разработке методов моделирования эстетических кривых и оценке их качества с позиций законов технической эстетики [Nabiyev & Ziatdinov, 2014]. В настоящей работе эти результаты уточнены, дополнены и систематизированы. Функциональные и эстетические кривые рассмотрены с единой точки зрения, предложены общие критерии оценки качества. Дан обзор методов моделирования кривых, удовлетворяющих этим требованиям. Ключевые моменты методов, важные для приоритета авторов, раскрыты в статье более подробно.

Качество геометрических форм

Независимо от специфики проектируемых объектов можно вывести универсальные требования к качеству геометрических форм функциональных кривых свободной формы. В этом разделе предлагается обобщенный список требований к качеству форм функциональных кривых, инвариантных относительно специфики проектируемого объекта.

1. Порядок гладкости не ниже 4-х

Гладкость есть свойство функции или геометрической фигуры (кривой, поверхности и др.), состоящее в том, что эта функция дифференцируема или у каждой точки данной фигуры имеется окрестность, допускающая задание с помощью дифференцируемых функций. В различных видах дизайна используются сплайны разного порядка гладкости. Например, при проектировании трасс дорог используются клотоидные сплайны и обеспечивается гладкость не ниже 2-го порядка. Для профилирования кулачка распределительного вала высокоскоростных двигателей необходима гладкость не ниже 3-го порядка, поэтому проектирование профиля начинается с вычерчивания плавного графика 3-ей производной [Рожков, 1983]. При моделировании пространственных кривых для обеспечения непрерывности функции кручения кривая должна иметь 3-ий порядок гладкости. Пространственная кривая с плавным кручением должна иметь 4-ый порядок гладкости, что следует из анализа пространственной криволинейной траектории движения материальной точки [Карякин, 69].

2. Отсутствие или минимальное количество экстремумов кривизны

Плавность линии зависит также от формы графика изменения кривизны по длине линии движения. Осцилляции функции кривизны вызовет согласно основному уравнению динамики [Карякин, 69] пульсацию центробежных сил, действующих на материальную точку. Поэтому участок линии движения должен иметь минимальное число экстремумов кривизны или минимальное число вершин кривой линии. Например, наличие лишних экстремумов кривизны у формы объектов дизайна могут привести к следующим отклонениям:

- Являться причиной неоправданного биения толкателя и в конечном итоге привести к преждевременному износу механизма.
- Вызывать залипание почвы на участке плуга с концентрацией кривизны у траектории движения почвы, что приводит к увеличению сопротивления плуга, и в конечном итоге увеличивает энергоемкость процесса вспашки [Муфтеев и др., 2006].
- Их наличие на аэродинамическом профиле приводит к неоправданной пульсации среды, обтекающей профиль, что увеличивает лобовое сопротивление профиля и может спровоцировать срыв потока, а также увеличение силы давления на профиль.

- Вызвать необходимость лишних торможений и разгонов, что, в конечном счете, увеличивает энергозатраты на перемещение транспортного средства [Абдуллин и др., 2011].
- Их наличие у кривых кузовных поверхностей и архитектурных форм приводят к эффекту кривых зеркал [Фокс & Пратт, 85].
- Формировать неправильное визуальное восприятие объектов компьютерной графики и САД [Ziatdinov, 2015].

3. Малые значения вариации кривизны и скорости ее изменения

В некоторых прикладных областях вводится требование минимизации вариации кривизны, следовательно концентрация кривизны должна быть ограничена по максимальному значению. Например, такое ограничение на минимальное значение радиуса кривизны (максимальную кривизну) вводится естественным образом при проектировании дорог, где минимальный радиус виража ограничивается из расчета допустимой скорости транспортного средства [Андреев & Бабков, 69], [Федотов, 2004].

Важным параметром качества кривой является скорость изменения кривизны. При проектировании трассы дороги этот параметр регламентирует скорость нарастания центробежной силы на автомобиль на виражах, и легко контролируется благодаря применению сегментов клотоиды с линейным изменением функции кривизны [Андреев & Бабков, 69], [Федотов, 2004].

4. Малое значение потенциальной энергии кривой

Кривая, имеющая минимальное значение потенциальной энергии, называется *эластикой* [Shen et al., 2003]:

$$E_{MEC} = \int_{l_0}^{l_1} \kappa(s) ds \rightarrow \min \quad (1)$$

Она представляется в виде осевой линии деформированной упругой рейки между двумя грузиками (кницами). Качество эластик апробировано многовековым опытом судостроения. Гибкие рейки (физические сплайны) применялись в лофтинге профилей шпангоутов, батоксов и ватерлиний при проектировании и строительстве судов, а позднее, автомобилей и самолетов.

Математически точное моделирование контура изогнутого физического сплайна используется в программе моделирования кривых KURGLA системы проектирования кораблей AUTOKON [Mehlum & Sorenson 71, Фокс & Пратт 82]. В одном из алгоритмов программы KURGLA виртуальный физический сплайн аппроксимируется сегментами клотоиды. Автор работы [Mehlum,

74] утверждает, что между точками фиксации физического сплайна кривизна меняется линейно как у клотоиды.

Считается, что плавность кривой напрямую связана с потенциальной энергией кривой. Необходимость выбора функциональной кривой с малым значением потенциальной энергии обосновывается следующим предположением. При движении объекта с функциональной поверхностью с большой скоростью, среда, обтекающая объект, ведет себе как упругое тело. Очевидно, что для деформации упругой среды по линиям тока с меньшей потенциальной энергией будет затрачиваться меньше работы. При движении материальной точки по вогнутой криволинейной траектории с учетом трения, **работа, затрачиваемая на перемещение**, будет меньше при меньшем значении потенциальной энергии траектории перемещения. Это правомерно и при движении материальной точки по криволинейной плоской траектории при наличии трения.

Развитие методов научной визуализации открывает новые возможности для математического моделирования геометрических форм. Появляется возможность исследования полиномиальных и нелинейных сплайнов путем вычислительного эксперимента и, как результат, получения высококачественных визуализаций с высоким разрешением. В таких визуализациях точки определяются пикселями, а вычисление области разрешением 100×100 пикселей может занять несколько минут. В [Ziatdinov & Yoshida, 2016] были получены визуализации для функционала потенциальной энергии квадратичной кривой Бернштейна-Безье с монотонной функцией кривизны.

5. Эстетический анализ с позиций законов технической эстетики

Оценку качества кривой, в том числе и с позиций законов технической эстетики, необходимо вести по предложенному объективному методу оценки плавности. Если дизайнер не ограничен необходимостью поиска инженерной кривой, он может моделировать кривые свободной формы на геометрических определителях вида опорной или касательной ломаной. К примеру, в работе (Nabiyev & Ziatdinov, 2014) впервые в области геометрического моделирования был проведен эстетический анализ плоских кривых Бернштейна-Безье с позиции законов технической эстетики. Формообразующие признаки геометрии кривых оценивались по следующим критериям: лаконичность-целостность, выразительность, пропорциональная согласованность, композиционное равновесие, структурная организованность, образность, рациональность, динамичность, масштабность, пластичность, гармоничность. В зарубежной литературе кривые Бернштейна-Безье с монотонной функцией кривизны (class A Bézier curve) считаются эстетическими кривыми, хотя их эстетический анализ никогда не проводился. Проведенный авторами работы (Nabiyev & Ziatdinov, 2014) детальный эстетический анализ показал, что это утверждение ошибочно.

Существует другой подход к оценке эстетичности кривой, основанный на математических характеристиках форм, выявленных у объектов реального мира (например, крылья бабочек) [Harada, 1997], [Kineri et al., 2014]. Для моделирования красивых (эстетических) форм предлагаются т.н. *log-эстетические кривые*, имеющие линейный график кривизны в логарифмической шкале. Множество известных спиралей, в том числе клотоида, являются частными случаями этого класса кривых. В (Ziatdinov, 2012) был предложен самый широкий класс кривых с монотонной функцией кривизны, называемый *суперспиралями*. Уравнения этих кривых выражаются через Гауссовы гипергеометрические функции и численно интегрируются адаптивными методами типа Гаусса-Кронрода.

Авторы работы считают, что приоритетным является оценка по критериям плавности. Экспертная оценка с позиций законов технической эстетики правомерна только после оценки на плавность или при отсутствии возможности проведения такого анализа.

Кривые класса F

1. Методы моделирования

Таким образом, для построения очень плавной траектории движения необходимо минимальное количество опорных точек моделируемой сплайн-траектории движения и высокий, не ниже 4-го, порядок гладкости; плавное кручение пространственной кривой; ограничение на максимальное значение кривизны и скорость изменения кривизны; минимизацию функционала потенциальной энергии. Функциональные кривые, удовлетворяющие этим требованиям, называются *кривыми класса F* [Муфтеев и др., 2013].

Модель кривой в прикладной геометрии называется определителем [Котов, 70], который состоит из геометрической части и алгоритма генерации точек кривой или процедуры построения аппроксимирующего сплайна. Геометрическую часть определителя можно рассматривать как геометрический определитель кривой. Наиболее привычными и естественными видами геометрического определителя являются множества точек (вида опорной ломаной) или множества касательных прямых (в частности, вида касательной ломаной). Кроме того, в прикладной геометрии используются т.н. управляющие сплайновые полигоны NURBS кривых. Различные виды геометрических определителей имеют свои достоинства и недостатки. Ломаная инцидентности позволяет точно позиционировать кривую, касательная ломаная однозначно и точно задает форму моделируемой кривой, S-полигон NURBS кривой высокой степени позволяет локально изменять форму кривой и гарантирует высокое качество пространственных кривых по критериям плавности кривизны и кручения.

Общая схема моделирования кривой линии состоит из следующих основных этапов [Муфтеев, 86]:

1. Эскизирование кривой. Первоначальная информация о кривой может быть задана в виде: а) лекальной кривой или её дискретного представления, б) множества точек, снятых с натурального макета с помощью измерительной системы, в) линии, проведенной конструктором на бумаге или экране графического дисплея и зафиксированной в виде дискретного множества точек, г) дискретного множества точек, через которые должна пройти кривая, д) фиксированной аналитической кривой.
2. Построение на эскизе кривой геометрического определителя, задающего геометрическую структуру кривой.
3. Изогеометрическая аппроксимация геометрического определителя посредством аналитической (либо кусочно-аналитической) кривой заданного класса или построение алгоритма генерации точек кривой на заданных параметрах геометрического определителя.
4. Переход к другому типу определителя кривой путем эквивалентного преобразования или путем изогеометрической аппроксимации определителя кривой для ее редактирования с помощью параметров нового геометрического определителя.
5. Переход к другому типу определителя кривой путем эквивалентного преобразования или путем изогеометрической аппроксимации определителя кривой для решения метрических и позиционных задач в CAD-системах. В этом случае новый определитель кривой называется шаблоном кривой.

2. Требования к методам моделирования функциональных кривых

Общие требования к методам моделирования кривых формулируются в работах (Фокс&Пратт 82), (Farin, 2006), (Муфтеев, 86), (Osipov & Muftjejev, 89), (Аронов, 75). В эти требования входят устойчивость формообразования или изогеометричность; инвариантность относительно аффинных и проективных преобразований; высокое качество кривой по критериям плавности и эстетике; гибкость; инструментальное разнообразие; возможность применения аналитических кривых.

Сравнительная оценка кривых

Для объективного сравнения кривых необходимо привести их к единому геометрическому определителю и провести сравнительный анализ по критериям плавности. При сравнении двух кривых на одном и том же геометрическом определителе проверяется количество экстремумов кривизны, и кривая с большим количеством отбраковывается. Затем сравнивается порядок гладкости, и кривая с меньшей гладкостью отбраковывается. Далее кривые сравниваются по значению потенциальной энергии. Последним этапом этой оценки может служить эстетический анализ с позиций законов технической эстетики.

Заключение

В работе предложен многокритериальный подход к оценке качества форм функциональных кривых, формообразующих поверхности, качество которых существенно определяет эстетические качества объектов дизайна. К эстетическим функциональным кривым предложено отнести эстетические кривые, определяющие потребительские свойства изделия.

На основе анализа движения материальной точки по криволинейной траектории выработаны требования к качеству функциональных кривых для безударного плавного движения материальной точки. Определен общий список требований к качеству функциональных кривых (высокий порядок гладкости, минимальное число экстремумов кривизны, минимизация максимального значения кривизны, минимизация скорости изменения кривизны, минимизация потенциальной энергии кривой). Определены дополнительные требования к эстетическим функциональным кривым с позиции законов технической эстетики. Кривые, удовлетворяющие требованиям к функциональным кривым, определены как *кривые класса F*.

Список литературы

- [1] Павлов, В. Е. (1969). Брахистохрона применительно к сортировочной горке. Применение современных математических методов в эксплуатации железных дорог//Сб. научн. тр. ЛИИЖТа, (300), 138-146.
- [2] Arslan, A., Tari, E., Ziatdinov, R., & Nabiyev, R. I. (2014). Transition curve modeling with kinematical properties: research on log-aesthetic curves. *Computer-Aided Design and Applications*, 11(5), 509-517.
- [3] Савелов, А. А. (1960). Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. — М.: Физматлит, 1960. — 294 с.
- [4] Shen, J., Kang, S. H., & Chan, T. F. (2003). Euler's elastica and curvature-based inpainting. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(2), 564-592.
- [5] Ziatdinov, R. (2016). Visual Perception, Quantity of Information Function and the Concept of the Quantity of Information Continuous Splines, *Scientific Visualization* 8(1), 168-178.
- [6] Ziatdinov, R., & Yoshida, N. (2016). Visualization of the energy and variation of energy functionals for a planar quadratic Bézier curve with a monotonic curvature function. *Proceedings of the International Conference Geometric Analysis and Control Theory*, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia, December, 8 – 12, 2016.
- [7] Nabiyev, R. I., & Ziatdinov, R. (2014). Evaluation of Bernstein-Bézier curves' shape features using the laws of technical aesthetics, In: *Systems of design, technological preparation of manufacture and management phases of the life cycle of industrial products (CAD/CAM/PDM-2014)*, Institute of Control Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

- [8] Nabiyeu, R. I., & Ziatdinov, R. (2014). A mathematical design and evaluation of Bernstein-Bezier curves' shape features using the laws of technical aesthetics, *Mathematical Design & Technical Aesthetics* 2(1), 6-13.
- [9] Kineri, Y., Endo, S., & Maekawa, T. (2014). Surface design based on direct curvature editing. *Computer-Aided Design*, 55, 1-12.
- [10] Harada, T. (1997). Study of quantitative analysis of the characteristics of a curve. *Forma*, 12(1), 55-63.
- [11] Ziatdinov, R. (2012). Family of superspirals with completely monotonic curvature given in terms of Gauss hypergeometric function. *Computer Aided Geometric Design*, 29(7), 510-518.
- [12] Муфтеев В.Г., Михалкина Г.И., Романюк А.Н., Марданов А.Р., Семенов А.С. Моделирование кривых и поверхностей класса F в интегрированной среде САД-система + FairCurveModeler + Mathematica / Материалы научно-практической конференции, посвященной 60-летию кафедры "Трактора и Автомобиля" ФГБОУ ВПО БГАУ. 19-20 декабря 2013 г.
- [13] Муфтеев В.Г. Конструирование криволинейных поверхностей на основе метода огибающей и параметрических b-сплайнов. Диссертация на соиск. ученой степени канд. техн. наук. - Киев, 1986.
- [14] Ossipov, V. A., & Muftajev, V. G. (1989). Modelling curvilinear lines and surfaces via modified B-splines. *Computers in Industry*, 13(1), 61-67.
- [15] Мударисов С.Г. и др. Оптимизация геометрии лемешно-отвальной поверхности плуга / Мударисов С.Г., Муфтеев В.Г., Фархутдинов И.М. // Механизация и электрификация сельского хозяйства. -2009, №4, - С.17-19.
- [16] Рожков А.П. Кулачок привода клапана. Авторское свидетельство №1237778, приоритет от 5 сентября 1983 г., зарегистрирован 15 февраля 1986, с 1 июля 1991 выдан патент взамен авторского свидетельства.
- [17] Карякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С.. Краткий справочник по физике. -М.: Высшая школа, 1969. – 600с.
- [18] Муфтеев В.Г., Мударисов С.Г., Марданов А.Р. Моделирование рабочей поверхности плуга // Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 75-летию со дня открытия Чувашской государственной сельскохозяйственной академии. – Чебоксары, 2006 г. С.479-482.
- [19] Абдуллин, М.М., Архитектурно-ландшафтное проектирование дорог с учётом дорожной геометрии: учебник /М. М. Абдуллин, М. М. Фаттахов, П. А. Федоров. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2011. – 320 с.
- [20] Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / Пер. с англ. –М.: Мир, 1982. -304 с.

- [21] Андреев О.В., Бабков В.Ф. Справочник инженера-дорожника. – Изд.второе, перераб. и доп. – М.: Изд-во «Транспорт», 1969. – 552с.
- [22] Справочная энциклопедия дорожника / МИНТРАНС РОССИИ, Росавтодор. – М.: Информавтодор, 2004 -Т. 5: Проектирование автомобильных дорог / ред. Г. А. Федотов, П. И. Поспелов. - 2007. - 668 с.
- [23] Mehlum, E. Nonlinear splines // Computer Aided Geometric Design. Academic Press, London, 173-207, 1974.
- [24] Котов И.И. Начертательная геометрия (на принципах программированного обучения). М.: Высшая школа, 1970. 384 с.
- [25] Farin, G. (2006). Class a Bezier curves. Computer Aided Geometric Design, 23(7), 573-581.
- [26] Аронов Б.М. и др. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин / Аронов Б.М., Жуковский М.И., Журавлев В.А. М.: Машиностроение, 1975. - 192 с.